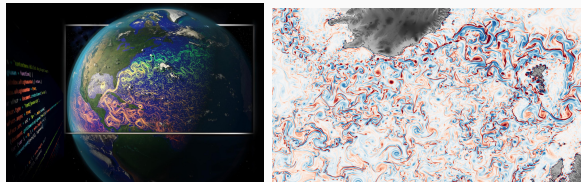


Coordonnées verticales



Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmosphère

November 25, 2025

Grenoble, IGE

- Comprendre le rôle de la coordonnée verticale dans les modèles océaniques
- Identifier les systèmes : z -level, σ (suivi de terrain), isopycnal
- Évaluer avantages / inconvénients selon les applications
- Présenter quelques implémentations (quasi-Eulérien, Lagrangian-Remap, V-ALE)

Oceanic primitive equations in Cartesian geopotential coordinates

$$\partial_t \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + D_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \varphi) = F_\varphi, \quad (\varphi = \Theta, S_A)$$

$$\rho = \rho_{\text{eos}}(\Theta, S_A, p_0(z))$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T$$

$$\mathbf{v} = (u, v, 0)^T$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, f/2)^T$$

$$p_0(z) = -\rho_0 g z$$

$$p = p_h + \rho_0 g \eta$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, g)$$

- **Kinematic surface and bottom boundary conditions** ($-h^0(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)$)

$$w|_{z=\eta} = \partial_t \eta + \mathbf{v}|_{z=\eta} \cdot \nabla \eta + \mathcal{J}_{\text{mass}}/\rho_0,$$

$$w|_{z=-h^0} = \mathbf{v}|_{z=-h^0} \cdot \nabla h^0,$$

- **Common approximations:**

- ▷ Geometrical assumptions (spherical geoid approximation, traditional shallow-ocean app.)
- ▷ Dynamical assumptions (Hydrostatic and Boussinesq assumptions)

Transformation to coordinate systems that align with the geometry of the domain:

- **Horizontal:** orthogonal curvilinear coordinates \implies additional metric coefficients
- **Vertical:** general description that supports various types of vertical coordinates \implies s-coordinates
(*Starr, 1945; Kasahara, 1974*)

Pourquoi des coordonnées verticales généralisées ?

—> **utilisation de coordonnées adaptées en fonction de l'application envisagée pour:**

- mieux représenter la bathymétrie,
- mieux représenter les couches limites (surface et fond),
- réduire le mélange artificiel non physique
 - ▷ direction préférentielle pour le mélange → direction *neutre* qui n'altère pas la flottabilité
- mieux représenter certains processus
 - ▷ e.g. propagation des ondes internes, marées, écoulements gravitaires, etc.

Coordonnées verticales généralisées

Systèmes de coordonnées permettant de localiser un même point dans l'océan

Coordonnée Cartésienne traditionnelle

$$(x, y, z, t)$$

Coordonnée verticale généralisée

$$(x, y, \textcolor{violet}{s}, t)$$

$$\text{avec } \textcolor{violet}{s} = s(x, y, z, t)$$

- La correspondance *un-à-un* (bijection) entre coordonnée (z) et GVC ($\textcolor{violet}{s}$) exige :

$$\frac{\partial \textcolor{violet}{s}}{\partial z} \neq 0$$

- Définition de l'**épaisseur spécifique** de couche s :

$$z_s \equiv \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\partial s / \partial z} \quad \longrightarrow \quad \textcolor{teal}{h} = \int_{s^-}^{s^+} \frac{\partial z}{\partial s} \, ds$$

l'épaisseur spécifique
contrôle l'expansion ou la
contraction de l'épaisseur
d'une couche

- ▷ z_s doit être **de signe unique** et **borné** : $|z_s| < \infty$.
- ▷ Cela garantit que les surfaces s sont **empilées de manière monotone** dans la verticale.

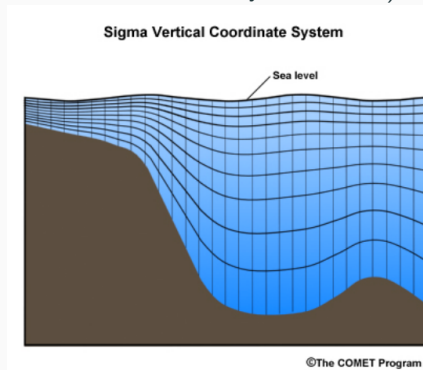
Exemple : coordonnées suivi de terrain

Les surfaces $s = \text{const}$ décrivent la géométrie souhaitée (ex. surfaces suivies, bathymétrie, etc.).

$$s(x, y, z, t) = \frac{z - \eta(x, y, t)}{H(x, y) + \eta(x, y, t)}, \quad s \in [-1, 0]$$

$$s = s_{\text{bot}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \eta(x, y, t)$$

$$s = s_{\text{top}} \quad \Leftrightarrow \quad z = -H(x, y)$$



On a deux descriptions équivalentes d'une même fonction (à mêmes x, y):

$$\phi(z, t) = \tilde{\phi}(\textcolor{violet}{s}(z, t), t)$$

Différenciation par rapport au temps (à z fixé)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_z = \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right|_{\textcolor{violet}{s}} + \left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_z \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}$$

Dérivées partielles transformées

Les dérivées se transforment via la chaîne de dérivation (chain rules) :

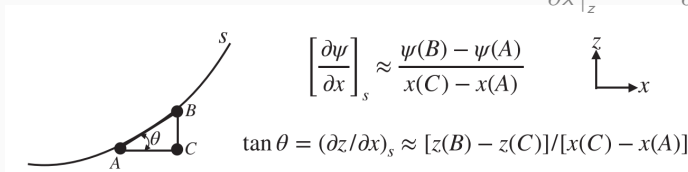
$$\frac{\partial}{\partial s} = z_s \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_z = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_s + \left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_z \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_z = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_s + \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_z \frac{\partial}{\partial s}$$

une dérivée en gardant s constant

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_z = 0 = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_s + \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_z z_s$$



Définition de la vitesse verticale généralisée $w^{(\dot{s})}$

Transformation de la dérivée matérielle:

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_z + u \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_z + w \frac{\partial}{\partial z}}_{\text{coordonnée Cartésienne}} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_s + u \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_s + \underbrace{\left\{ \frac{\partial s}{\partial t}\bigg|_z + u \frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_z + w \frac{\partial s}{\partial z} \right\}}_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s}$$

On définit la vitesse verticale en coordonnées s par :

$$w^{(\dot{s})} = z_s \Omega \equiv z_s \frac{Ds}{Dt} = w + z_s \left(\frac{\partial s}{\partial t}\bigg|_z + u \frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_z \right)$$

Ω est un taux de déplacement dans la coordonnée verticale s

Équation de continuité et équilibre hydrostatique

Equation de continuité

$$(\partial_x u)_z + \partial_z w = 0$$



chain
rules

$$z_s(\partial_x u)_s - (\partial_x z)_s \partial_s u + \partial_s w = 0$$

$$\partial_s w = \partial_s(z_s \Omega) + (\partial_x z)_s \partial_s u + u \partial_x(z_s)_s + \partial_t(z_s)_s$$

$$(\partial_t z_s)_s + (\partial_x z_s u)_s + \partial_s(z_s \Omega) = 0$$

Equilibre hydrostatique

$$\partial_z p = -\rho g$$



$$\partial_s p = -\rho g(z_s)$$

Quantité de mouvement horizontale

Forme conservative :

$$z_s \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \times \text{continuité} = \partial_t(z_s \varphi)_s + \partial_x(z_s u \varphi)_s + \partial_s(z_s \Omega \varphi)$$

Les composantes horizontales se réécrivent (exemple pour u) :

$$\partial_t(z_s \varphi)_s + \partial_x(z_s u \varphi)_s + \partial_s(z_s \Omega \varphi) - f(z_s v) = -\frac{z_s}{\rho_0} \underbrace{\left((\partial_x p)_s - \frac{1}{z_s} (\partial_x z)_s \partial_s p \right)}_{(\partial_x p)_s + \rho g (\partial_x z)_s} + z_s D_u.$$

Equations primitives 2D x-z en coordonnées verticales généralisées

- Terminologie NEMO: $z_s \equiv e_3$, $z_s \Omega \equiv \omega$
- Terminologie CROCO: $z_s \equiv H_z$

$$\partial_t(e_3 u) + \partial_x(e_3 u^2) + \partial_s(\omega u) - f(e_3 v) = -\frac{e_3}{\rho_0} [(\partial_x p) + \rho g(\partial_x z)] + e_3 D_u$$

$$\partial_s p = -\rho g e_3$$

$$\partial_t e_3 + \partial_x(e_3 u) + \partial_s(\omega) = 0$$

$$\partial_t(e_3 \varphi) + \partial_x(e_3 u \varphi) + \partial_s(\omega \varphi) = e_3 F_\varphi, \quad (\varphi = \Theta, S_A)$$

$$\rho = \rho_{\text{eos}}(\Theta, S_A, p_0(z))$$

Algorithmes pour la résolution des équations en coordonnées verticales généralisées

Méthode quasi-Eulérienne (QE)

$$\begin{aligned}\partial_t e_3 + \partial_x(e_3 u) + \partial_s \omega &= 0 \\ \partial_t(e_3 \varphi) + \partial_x(e_3 u \varphi) + \partial_s(\omega \varphi) &= 0\end{aligned}$$

→ on spécifie la coordonnée en imposant $\partial_t e_3 \propto \partial_t \eta$

$$\text{QE: } \partial_t e_3 \propto \partial_t \eta$$

$$\partial_s \omega = -\partial_t e_3 - \partial_x(e_3 u)^n$$

$$(e_3 \varphi)^{n+1} = (e_3 \varphi)^n - \Delta t \left(\partial_x(e_3 u \varphi)^{n+1/2} + \partial_s(\omega \varphi^{n+1/2}) \right)$$

Méthode arbitrairement Lagrangienne/Eulérienne (V-ALE)

$$\begin{aligned}\partial_t e_3 + \partial_x(e_3 u) + \partial_s \omega &= 0 \\ \partial_t(e_3 \varphi) + \partial_x(e_3 u \varphi) + \partial_s(\omega \varphi) &= 0\end{aligned}$$

→ on spécifie la coordonnée en imposant un $\partial_t e_3$ “arbitraire”

$$\text{V-ALE: } \partial_t e_3 = (e_3^{\text{target}} - e_3^n) / \Delta t$$

$$\partial_s \omega = -\partial_t e_3 - \partial_x(e_3 u)^n$$

$$(e_3 \varphi)^{n+1} = (e_3 \varphi)^n - \Delta t \left(\partial_x(e_3 u \varphi)^{n+1/2} + \partial_s(\omega \varphi^{n+1/2}) \right)$$

Méthode lagrangienne avec *remapping* (V-LR)

$$\begin{aligned}\partial_t e_3 + \partial_x(e_3 u) + \partial_s \omega &= 0 \\ \partial_t(e_3 \varphi) + \partial_x(e_3 u \varphi) + \partial_s(\omega \varphi) &= 0\end{aligned}$$

→ on spécifie la vitesse verticale ($\omega = 0$)

$$\begin{aligned}e_3^* &= e_3^n - \Delta t \partial_x(e_3 u)^n \\ (e_3 \varphi)^* &= (e_3 \varphi)^n - \Delta t \partial_x(e_3 u \varphi)^n\end{aligned}$$

$$\partial_s \omega = - (e_3^{\text{target}} - e_3^*) / \Delta t$$

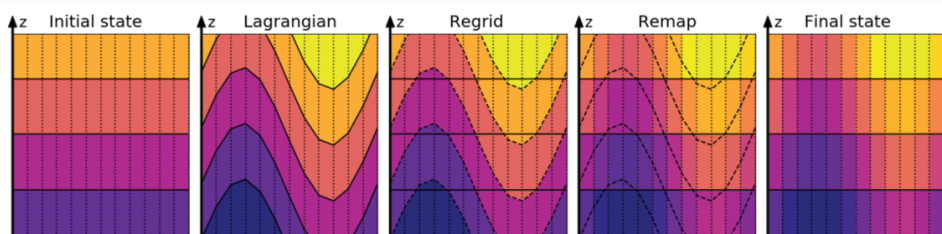
$$e_3^{n+1} = e_3^{\text{target}}$$

$$(e_3 \varphi)^{n+1} = (e_3 \varphi)^* - \Delta t \partial_s(\omega \varphi^n)$$

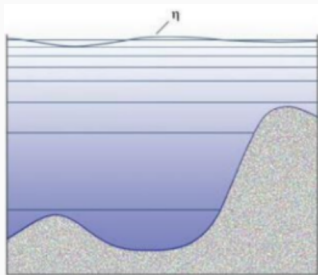
- On pourrait stopper l'algorithme après les étapes 1 & 2
- Les épaisseurs de couches peuvent devenir très petites
- L'advection est "splitée" directionnellement
- e_3^{target} est calculé seulement après l'étape lagrangienne

Méthode lagrangienne avec *remapping* (V-LR)

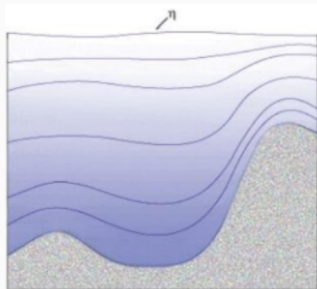
Notions de “regridding” et “remapping”



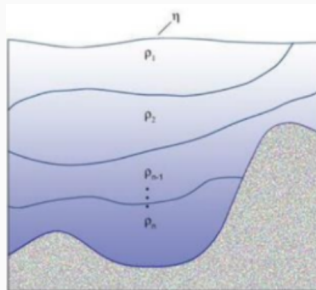
Différents types de coordonnées



**Coordonnée z^* (partial cells)
(QE)**



**Coordonnée σ suivi de
terrain (QE)**



**Coordonnée isopycnale
(V-LR)**

- **Avantages:**

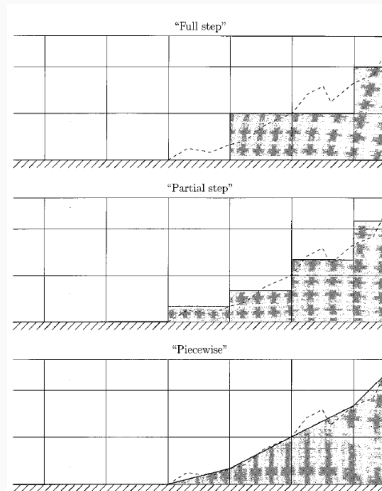
- ▷ Calcul du gradient (horizontal) de pression
- ▷ Résolution dans la couche limite de surface

- **Inconvénients:**

- ▷ Diffusion diapycnale
- ▷ Représentation du fond et des zones peu profondes
- ▷ Points masqués (perte d'efficacité)

- **Améliorations:**

- ▷ Partial cells
- ▷ Shaved cells (*Adcroft et al., 1997*)

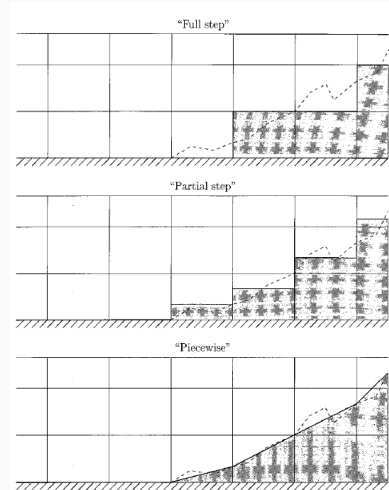


- **Avantages:**

- ▷ Calcul du gradient (horizontal) de pression
- ▷ Préservation des masses d'eau

- **Inconvénients:**

- ▷ Représentation des couches limites turbulentes
- ▷ Gestion des couches d'épaisseur nulle / perte de résolution
- ▷ Définition *ad-hoc* de la grille cible



- **Avantages:**

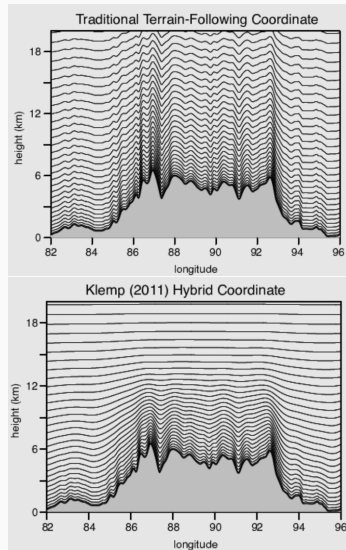
- ▷ Représentation de la dynamique de fond
- ▷ Tous les points de calcul dans chaque colonne sont en mer

- **Inconvénients:**

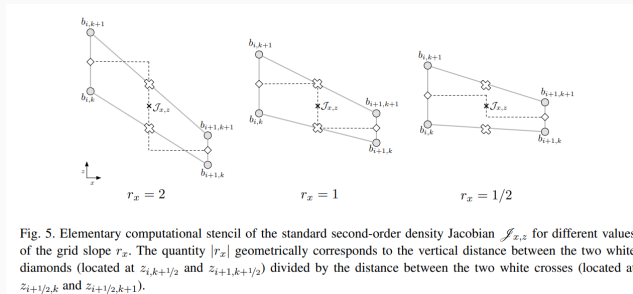
- ▷ Diffusion diapycnale
- ▷ Calcul du gradient (horizontal) de pression
- ▷ Requiert un fort lissage de la topographie

- **Améliorations:**

- ▷ Pénalisation des effets topographiques sous-maille



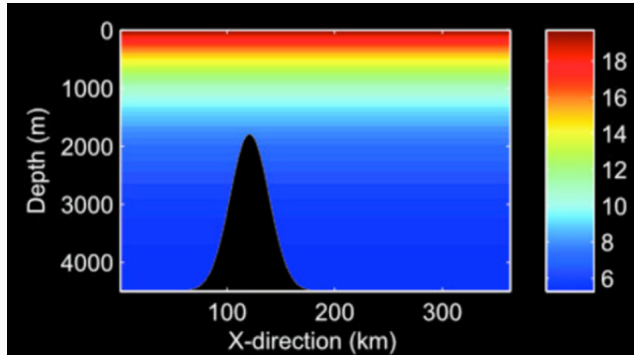
$$\partial_t(e_3 u) + \partial_x(e_3 u^2) + \partial_s(\omega u) - f(e_3 v) = -\frac{e_3}{\rho_0} [(\partial_x p) + \rho g(\partial_x z)] + e_3 D_u$$



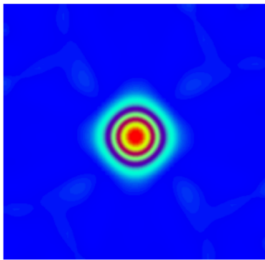
Gradient de pression : somme de deux termes

- En particulier, si $\rho(x, y, z, t) = \rho(z)$ (stratification neutre), le gradient horizontal (numérique) de pression est non nul.

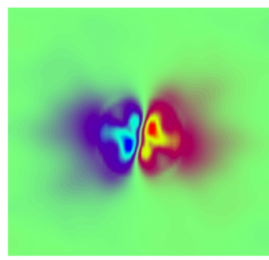
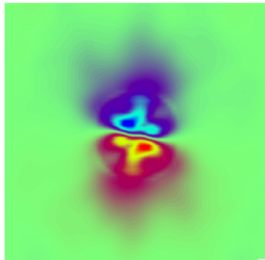
Stratification neutre - coordonnées sigma. Test du mont sous-marin



Stratification neutre - coordonnées sigma. Test du mont sous-marin



Elévation de surface η



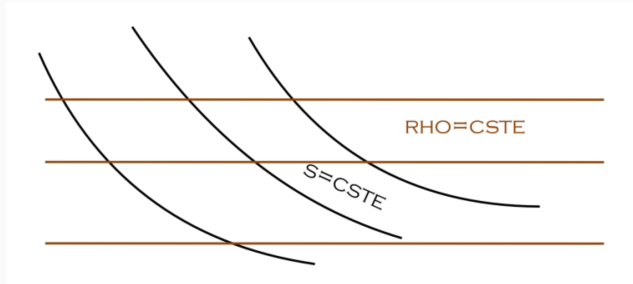
Courants barotropes \bar{u} , \bar{v}

Solution pragmatique : lissage de la bathymétrie ...

Diffusion diapycnale artificielle

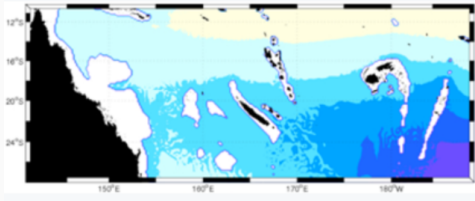
Utilisation de schémas “horizontaux” d’advection (de traceurs) diffusifs (décentrés)

→ La diffusion a lieu le long des couches du modèle

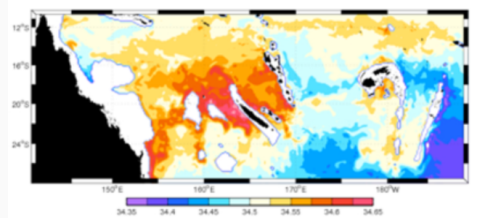


Diffusion diapycnale artificielle

Salinité à 1000 m de profondeur



Climatologie

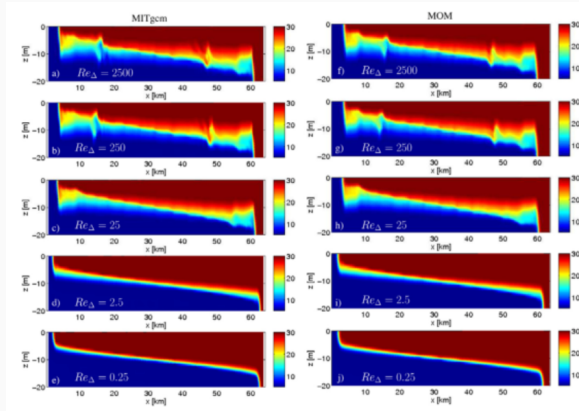


modèle ROMS (UP3)

(*Marchesiello et al., 2009*)

Diffusion diapycnale artificielle : impact de la viscosité (explicite ou implicite au schéma d'advection)

Cas test lock exchange à différents nombres de Reynolds



Exemple de coordonnée V-ALE

Coordonnées \tilde{z} (NEMO, MPAS-O)

On reprend l'équation de continuité en coordonnée s sous une forme *splitée*

$$\begin{aligned}\partial_t e_3 + \varsigma &= 0 \\ \partial_x(e_3 u) + \partial_s \omega - \varsigma &= 0\end{aligned}$$

cela permet d'identifier les différentes stratégies numériques suivantes:

- $\varsigma = \partial_x(e_3 u)$ correspond à une coordonnée Lagrangienne
- $\varsigma = 0$ correspond à une coordonnée Eulérienne
- $\varsigma = \partial_x(e_3 \bar{u})$ correspond à une coordonnée quasi-Eulérienne
- $\varsigma = \partial_x(e_3 \bar{u}) + \partial_x(e_3 \langle u - \bar{u} \rangle_{\text{HF}})$ correspond à la coordonnée \tilde{z}

Objectif de la coordonnée \tilde{z} : éliminer les hautes fréquences de la vitesse verticale ω .