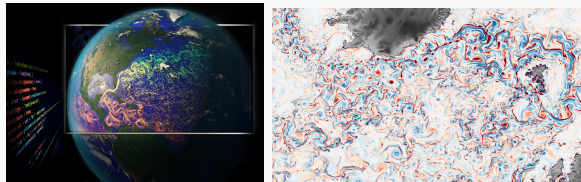


Transport numérique



Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmosphère

November 24, 2025

Grenoble, IGE

Equations primitives de l'océan en coordonnées cartésiennes géopotentielles

$$\partial_t \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + D_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \varphi) = F_\varphi, \quad (\varphi = \Theta, S_A)$$

$$\rho = \rho_{\text{eos}}(\Theta, S_A, p_0(z))$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T$$

$$\mathbf{v} = (u, v, 0)^T$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, f/2)^T$$

$$p_0(z) = -\rho_0 g z$$

$$p = p_h + \rho_0 g \eta$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, g)$$

- Kinematic surface and bottom boundary conditions ($-h^0(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)$)

$$w|_{z=\eta} = \partial_t \eta + \mathbf{v}|_{z=\eta} \cdot \nabla \eta + \mathcal{J}_{\text{mass}}/\rho_0,$$

$$w|_{z=-h^0} = \mathbf{v}|_{z=-h^0} \cdot \nabla h^0,$$

- Common approximations:

- ▷ Geometrical assumptions (spherical geoid approximation, traditional shallow-ocean app.)
- ▷ Dynamical assumptions (Hydrostatic and Boussinesq assumptions)

Equations primitives de l'océan en coordonnées cartésiennes géopotentielles

$$\partial_t \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + D_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \varphi) = F_\varphi, \quad (\varphi = \Theta, S_A)$$

$$\rho = \rho_{\text{eos}}(\Theta, S_A, p_0(z))$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T$$

$$\mathbf{v} = (u, v, 0)^T$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, f/2)^T$$

$$p_0(z) = -\rho_0 g z$$

$$p = p_h + \rho_0 g \eta$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, g)$$

- Kinematic surface and bottom boundary conditions ($-h^0(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)$)

$$w|_{z=\eta} = \partial_t \eta + \mathbf{v}|_{z=\eta} \cdot \nabla \eta + \mathcal{J}_{\text{mass}}/\rho_0,$$

$$w|_{z=-h^0} = \mathbf{v}|_{z=-h^0} \cdot \nabla h^0,$$

- Common approximations:

- ▷ Geometrical assumptions (spherical geoid approximation, traditional shallow-ocean app.)
- ▷ Dynamical assumptions (Hydrostatic and Boussinesq assumptions)

Introduction

Diversité des approches numériques

Table 2

Properties of some structured-grid coastal ocean models (note that the models might have many more choices than those listed here). Specific acronyms: FB = Forward-Backward, Gen = generalised, SPE = split-explicit, SPI = split-implicit, LF = Leapfrog, AM3 = 3rd-order Adams–Moulton, TR = trapezoidal, (S)UP3 = (Split) 3rd-order upwind, C2 = 2nd-order centered, C4 = 4th-order centered, QK3 = 3rd-order QUICKEST, SL = semi–Lagrangian, MY = Mellor–Yamada, GLS = Gen. length-scale model. GOTM (www.gotm.net) is a turbulence library that provides different state-of-the-art turbulence closure.

	Introd. ref.	Horz grid	Mode splitting	Internal Time-stepping	External Time-stepping	Mom. advec.	Tracer advec.	Vertical discret.	Turb. closure
BOM	Svendsen et al. (1996)	C	SPE	LF-AM3	LF-TR	TVD Superbee	TVD Superbee	<i>s</i>	MY2.5
COHERENS	Luyten et al. (1999)	C	SPI/SPE	2-level	-	TVD Superbee	TVD Superbee	<i>s</i>	<i>k-ε</i>
Delft-3D	Gerritsen et al. (2004)	C	SPI	ADI	ADI	UP3	UP3 w/ Forester fltr	<i>z & s</i>	<i>k-ε</i>
ECOM-si	Blumberg (1992)	C	SPI	2-level	<i>θ</i> -scheme	C2	C2	<i>s</i>	MY2.5
GETM	Burchard and Bolding (2002)	C	SPE	2-level	FB	TVD	TVD	adapt.	GOTM
HAMSOM	Backhaus (1985)	C	SPI	2-level	<i>θ</i> -scheme	TVD	TVD	<i>z</i>	<i>k-ε</i>
ROMS (Rutgers)	Haidvogel et al. (2000)	C	SPE	LF-TR	LF-AM3	UP3	MPDATA	<i>s</i>	GLS
ROMS (UCLA)	Shchepetkin and McWilliams (2005)	C	SPE	LF-AM3	Gen FB	UP3	UP3	<i>s</i>	KPP
ROMS (Agrif)	Penven et al. (2006)	C	SPE	LF-AM3	Gen FB	UP3	WENO5Z	<i>s</i>	KPP
Mars3D	Lazure and Salomon (1991)	C	SPI	2-level	ADI	QK3	QK3	<i>s</i>	GLS
MIKE 3	Pietrzak et al. (2002)	C	SPI	2-level	ADI	Ultimate QK3	Ultimate QK3	<i>s</i>	<i>k-ε</i>
MOHID	Martins et al. (2001)	C	SPI	2-level	ADI	upstream	TVD Superbee	<i>s</i>	GOTM
NCOM	Martin (2000)	C	SPI	LF	<i>θ</i> -scheme	SUP3	FCT(UP3)	hyb <i>z/s</i>	MY2.5
POLCOMS	Holt and James (2001)	B	SPE	2-level	FB	PPM w/ limiters	PPM w/ limiters	<i>s</i>	GOTM
POM	Blumberg and Mellor (1978)	C	SPE	LF	LF	C2	MPDATA	<i>s</i>	MY2.5
Symphonie	Johns et al. (1992)	C	SPE	LF	LF	C4	SUP3	<i>s</i>	TKE
	Marsaleix et al. (1998)								
TRIM-3D	Cheng et al. (1993)	C	SPI	2-level	<i>θ</i> -scheme	SL	TVD Van-Leer	<i>z</i>	GLS
Hycom	Bleck (2002)	C	SPE	LF	LF	Enstrophy-conserving	FCT(C2)	hyb <i>z/s/p</i>	KPP
NEMO	Madec et al. (1991)	C	SPE	LF	LF	Enstrophy-conserving	FCT(C2)	<i>z & s</i>	GLS

Transport 1D: translation pure du signal

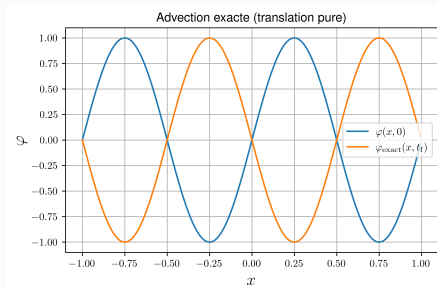
Équation considérée :

$$\partial_t \varphi + c \partial_x \varphi = 0, \quad c = \text{cste}$$

Interprétation physique :

- L'advection transporte un signal à la vitesse du courant **sans changement de forme**.
- Solution exacte :

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - ct, 0) \quad \longrightarrow \text{simple déplacement vers l'aval}$$



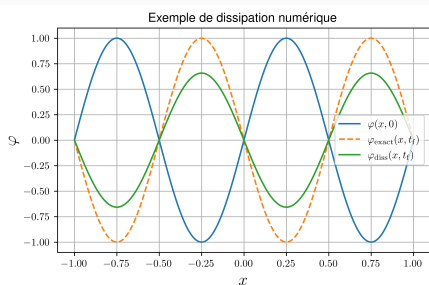
Transport 1D: dissipation numérique

Définition :

- La dissipation est l'atténuation artificielle de l'amplitude du signal.
- Le schéma numérique agit comme une diffusion numérique qui lisse les variations spatiales.

Effets visuels :

- La structure se “diffuse” au cours du temps même si physiquement elle ne devrait pas
→ Le signal s'aplatit et perd de l'énergie



Transport 1D: dispersion numérique

Définition :

- La dispersion est la déformation de la phase des différentes composantes du signal.
- Le schéma numérique donne une vitesse de phase numérique différente de la vitesse réelle c

Effets visuels :

- Le signal se déforme; déplacement incorrect du maximum; apparition d'ondes parasites

→ Le signal arrive au mauvais endroit et change de forme

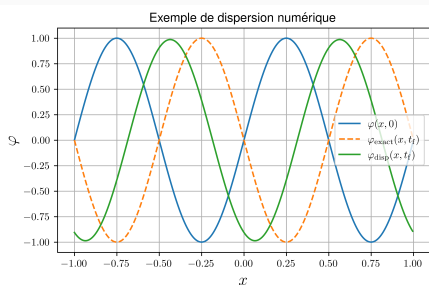
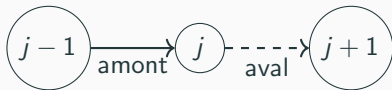


Schéma Euler amont (upwind explicite d'ordre 1) – fonction lisse

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c > 0$$

Schéma Euler amont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \left[\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right] (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n)$$



stencil utilisé: $(j-1, j \rightarrow j^{n+1})$

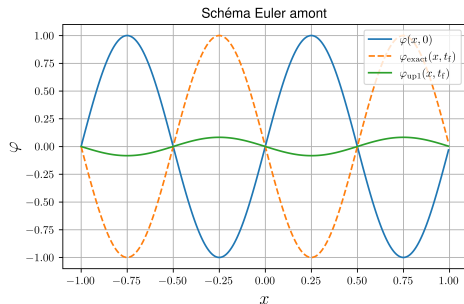
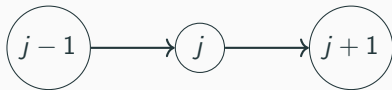


Schéma Lax Wendroff (ordre 2 espace/temps) – fonction lisse

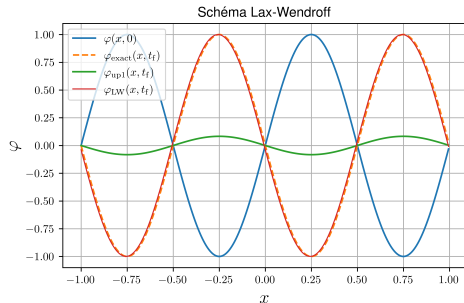
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c > 0$$

Schéma Lax Wendroff

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \left[\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right] \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right]^2 (\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n)$$



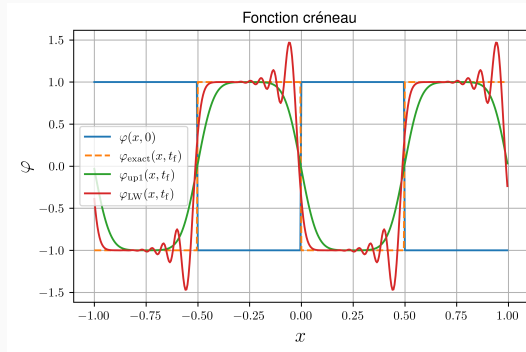
stencil utilisé: $j-1, j, j+1$



Fonction lisse



Fonction créneau



→ finalement, lequel est le plus précis ?

Etude d'un schéma numérique

Etude d'un schéma numérique

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \end{cases} \longrightarrow \varphi_{\text{exact}}(x, t) = \varphi_0(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}; t > 0$$

Hypothèse de solution périodique (onde plane):

$$\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(t) \exp(\imath kx), \quad k \in \mathbb{R} \text{ (nombre d'onde)}$$

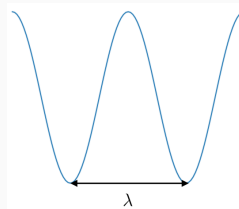
Transformation en ODE pour chaque mode k :

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} + \imath ck \hat{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}(0) \exp(-\imath kct)$$

Solution pour le mode k :

$$\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(0) \exp(\imath k(x - ct)) = \hat{\varphi}(0) \exp(\imath(kx - \omega_{\text{exact}} t))$$

- ▷ ω_{exact} est la fréquence angulaire
- ▷ Relation de dispersion de l'équation d'advection $\omega_{\text{exact}} = ck$



$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Etude d'un schéma numérique

Solution pour le mode k : $\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(0) \exp(\imath(kx - \omega t))$

- Différences finies: $\varphi_j^n \approx \varphi(x_j, t^n) = \hat{\varphi}(0) \exp(\imath(kx_j - \omega_{\text{num}} t^n))$
- Grille régulière: $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

Euler amont:

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \left[\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right] (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n) \quad \longrightarrow \quad \exp(-\imath \omega_{\text{num}} t^n) \varphi_j^n = \underbrace{\varphi_j^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (1 - \exp(-\imath k \Delta x)) \varphi_j^n}_{\alpha_{\text{adv}}}$$

Solution exacte

$$\varphi(x_j, t^{n+1}) = \mathcal{A}_{\text{exact}} \varphi(x_j, t^n)$$

$$\mathcal{A}_{\text{exact}} = \exp(-\imath \omega_{\text{exact}} \Delta t) = \exp(-\imath k c \Delta t)$$

Solution numérique

$$\varphi_j^{n+1} = \mathcal{A}_{\text{num}} \varphi_j^n$$

$$\mathcal{A}_{\text{num}} = 1 - \alpha_{\text{adv}} (1 - \exp(-\imath k \Delta x))$$

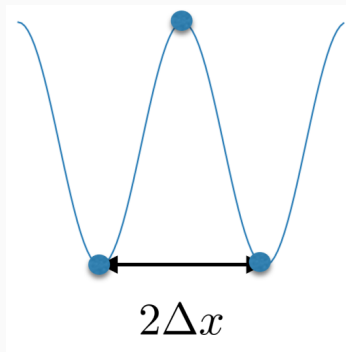
$\alpha_{\text{adv}} \equiv$ nombre de Courant

Etude d'un schéma numérique

$$\mathcal{A}_{\text{num}} = \exp(-i\omega_{\text{num}}\Delta t) = 1 - \alpha_{\text{adv}}(1 - \exp(-i\theta)), \quad \theta = k\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda$$

Sur une grille de calcul:

$$\lambda \geq 2\Delta x \text{ (soit } 0 \leq \theta \leq \pi)$$



θ petit $\longleftrightarrow$ grandes échelles,

θ grand $\longleftrightarrow$ petites échelles

Etude du facteur d'amplification

$$\varphi_j^{n+1} = \mathcal{A}_{\text{num}} \varphi_j^n$$

Dissipation

$$\frac{|\varphi_j^{n+1}|}{|\varphi_j^n|} = |\mathcal{A}_{\text{num}}|$$

$$|\mathcal{A}_{\text{exact}}| = 1$$

Dispersion

i.e. changement de phase en 1 pas de temps

$$\arg(\varphi_j^{n+1}) - \arg(\varphi_j^n) = \arg(\mathcal{A}_{\text{num}})$$

$$\begin{aligned} \arg(\mathcal{A}_{\text{exact}}) &= -\omega_{\text{exact}} \Delta t = -kc \Delta t \\ &= -\alpha_{\text{adv}} \theta \end{aligned}$$

Etude d'un schéma numérique

Euler amont

$$\mathcal{A}_{\text{num}} = 1 - \alpha_{\text{adv}}(1 - \exp(-i\theta))$$

Dissipation: $|\varphi_j^{n+1}|/|\varphi_j^n| = |\mathcal{A}_{\text{num}}|$

$$|\mathcal{A}_{\text{num}}|^2 = 1 - 2\alpha_{\text{adv}}(1 - \alpha_{\text{adv}})(1 - \cos(\theta))$$

Le schéma est stable si $|\mathcal{A}_{\text{num}}| \leq 1, \forall \theta \in [0; \pi]$

$$|\mathcal{A}_{\text{num}}| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \alpha_{\text{adv}} \leq \alpha_{\text{adv}}^* = 1$$

$\alpha_{\text{adv}}^* \equiv$ nombre CFL (Courant Friedrichs Lewy)

Dispersion: $R = \arg(\mathcal{A}_{\text{num}}) / \arg(\mathcal{A}_{\text{exact}})$

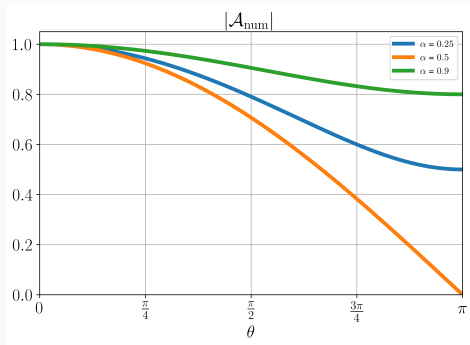
$$\arg z = \arctan(\Im(z)/\Re(z)), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$R(\theta) = \underbrace{-\frac{1}{\alpha_{\text{adv}}\theta}}_{1/\arg(\mathcal{A}_{\text{exact}})} \arctan\left(\frac{-\alpha_{\text{adv}}\sin(\theta)}{1 - \alpha_{\text{adv}}(1 - \cos(\theta))}\right)$$

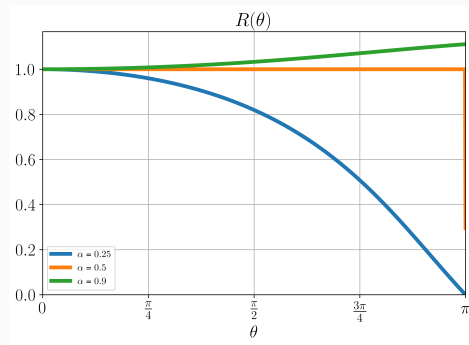
Pour les échelles “bien résolues” ($\theta \rightarrow 0$)

$$R(\theta \rightarrow 0) = 1 - \frac{1}{6}(1 - \alpha_{\text{adv}})(1 - 2\alpha_{\text{adv}})\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)$$

Dissipation



Dispersion



Schémas en temps et schémas en espace: ordre

Euler amont: $\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \alpha_{\text{adv}} (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n)$

- Schéma d'ordre p en temps et q en espace : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$
- Développements de Taylor:

▷ En temps: $\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n + \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \dots$

▷ En espace: $\varphi_{j-1}^n = \varphi_j^n - \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dots$

⇒ Euler amont: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t^1) + \mathcal{O}(\Delta x^1)$, ordre 1 en temps et en espace

La dissipation et la dispersion peuvent venir à la fois du schéma en temps et du schéma en espace

Exercice: montrer que le schéma de Lax-Wendroff est à l'ordre 2 en temps et en espace
(utiliser le fait que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$)

Schéma spatial

Un schéma décentré dissipe (dissipation *implicite*)

upwind (amont d'ordre 1)

$$\frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\Delta x} = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{\Delta x^2} \right)$$

→ c'est une approximation de $\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Equation modifiée: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{c \Delta x}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

⇒ dissipation pour $c > 0$

Schéma spatial

Un schéma décentré dissipe (dissipation *implicite*)

upwind (amont d'ordre 3)

$$\frac{2\varphi_{j+1} + 3\varphi_j - 6\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}}{6\Delta x}$$

→ c'est une approximation de $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

$$\text{Equation modifiée: } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{c \Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

⇒ dissipation pour $c > 0$

Etude séparée en temps et en espace

Etude séparée en temps et en espace

On souhaite étudier séparément les actions du schéma en temps et du schéma en espace

Exemple (pour le schéma temporel)

Schéma d'Euler

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi, t), \quad \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = F(\varphi^n, t^n) \longrightarrow \text{pour l'éq. de transport: } \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = -c \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^n}$$

On rappelle que $\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(0) \exp(i(kx - \omega t))$ et on suppose une discrétisation exacte en espace, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i k \varphi$

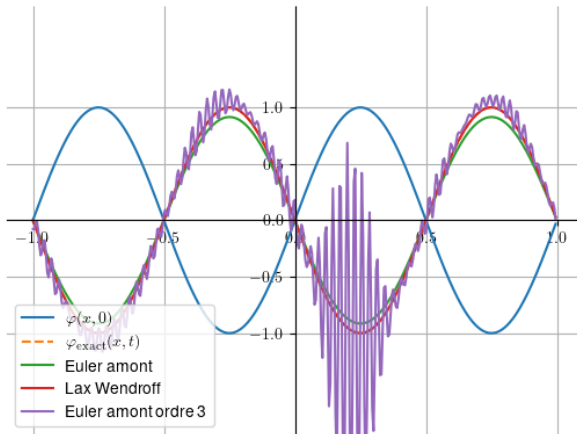
$$\varphi^{n+1} = (1 - i k c \Delta t) \varphi^n = (1 - i \omega \Delta t) \varphi^n$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{num}} = 1 - i \omega \Delta t, \quad |\mathcal{A}_{\text{num}}|^2 = 1 + (\omega \Delta t)^2 > 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Schéma instable}$$

*C'est la dissipation du schéma décentré en espace qui stabilise le schéma Euler **amont***

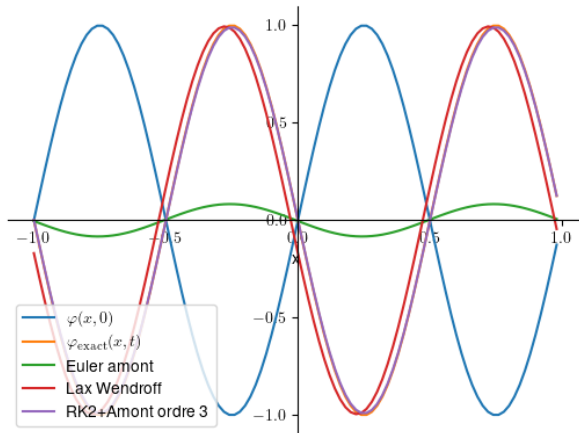
Etude séparée en temps et en espace

Euler en temps, divers schémas en espace



Etude séparée en temps et en espace

Runge-Kutta d'ordre 2 en temps, divers schémas en espace



Etude séparée en temps et en espace

Exemple (pour le schéma temporel)

Schéma ϑ

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi, t), \quad \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = \vartheta F(\varphi^n, t^n) + (1 - \vartheta)F(\varphi^{n+1}, t^{n+1}) \quad [\text{schéma implicite pour } \vartheta \neq 1]$$

$$\longrightarrow \text{pour l'éq. de transport: } \varphi^{n+1} = \varphi^n - c\Delta t \left(\vartheta \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^n} + (1 - \vartheta) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^{n+1}} \right)$$

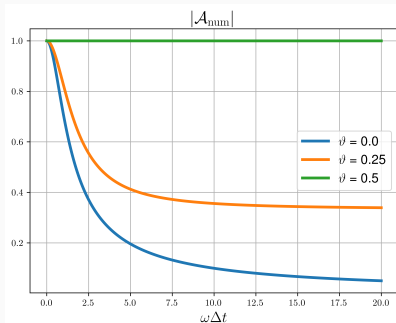
$$(1 + i(1 - \vartheta)\omega\Delta t)\varphi^{n+1} = (1 - i\vartheta\omega\Delta t)\varphi^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_{\text{num}} = \frac{1 - i\vartheta\omega\Delta t}{1 + i(1 - \vartheta)\omega\Delta t}, \quad |\mathcal{A}_{\text{num}}|^2 = \frac{1 + (\vartheta\omega\Delta t)^2}{1 + (1 - \vartheta)^2(\omega\Delta t)^2}$$

$\longrightarrow$ Schéma stable si $\vartheta \leq 1/2$, schéma neutre (i.e. $|\mathcal{A}_{\text{num}}| = 1$) si $\vartheta = 1/2$ (Crank-Nicolson)

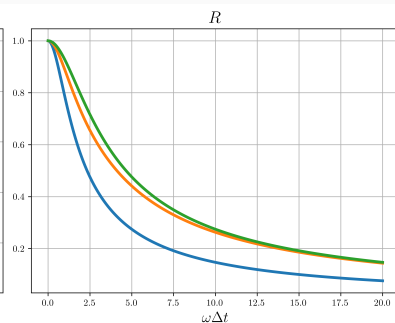
Sous ces conditions sur ϑ , le schéma est inconditionnellement stable : i.e. $|\mathcal{A}_{\text{num}}| \leq 1, \forall(\omega\Delta t)$

Dissipation et dispersion du schéma ϑ

Dissipation



Dispersion



On utilise un schéma implicite à grands pas de temps uniquement quand la précision n'est pas importante. Sinon compromis entre temps de calcul et précision.

Schémas implicites et résolution d'un système linéaire

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - c\Delta t \left(\vartheta \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^n} + (1 - \vartheta) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^{n+1}} \right)$$

Discrétisation en espace (par exemple en centré ordre 2) :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^n} \approx \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=t^{n+1}} \approx \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Pour aboutir au système linéaire:

$$a\varphi_{j-1}^{n+1} + b\varphi_j^{n+1} + c\varphi_{j+1}^{n+1} = f$$

Quelques schémas (explicites pour $\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi)$)

$$(\text{AB2}\epsilon) \begin{cases} \varphi^{n+1/2} &= (\frac{3}{2} + \epsilon) \varphi^n - (\frac{1}{2} + \epsilon) \varphi^{n-1} \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^{n+1/2}) \end{cases}$$

$$(\text{LF}) \begin{cases} \varphi^{n+1} &= \varphi^{n-1} + 2\Delta t F(\varphi^n) \end{cases}$$

$$(\text{LFAM3}) \begin{cases} \varphi^{n+1,*} &= \varphi^{n-1} + 2\Delta t F(\varphi^n) \\ \varphi^{n+1/2} &= \frac{5}{12}\varphi^{n+1,*} + \frac{2}{3}\varphi^n - \frac{1}{12}\varphi^{n-1} \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^{n+1/2}) \end{cases}$$

$$(\text{RK3}) \begin{cases} \varphi^{n+1/3} &= \varphi^n + \frac{\Delta t}{3} F(\varphi^n) \\ \varphi^{n+1/2} &= \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} F(\varphi^{n+1/3}) \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^{n+1/2}) \end{cases}$$

$$(\text{RK2}) \begin{cases} \varphi^{n+1,*} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^n) \\ \varphi^{n+1} &= \frac{1}{2} (\varphi^n + \varphi^{n+1,*}) + \frac{\Delta t}{2} F(\varphi^{n+1,*}) \end{cases}$$

$$(\text{Euler}) \begin{cases} \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^n) \end{cases}$$

Schéma d'Euler pour la diffusion

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \nu > 0$$

Relation de dispersion de l'équation de diffusion $\omega_{\text{exact}} = -\nu k^2$ (en supposant $\varphi(x, t) = \exp(i(kx - \omega t))$)

- Schéma d'Euler en temps

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = -\nu k^2 \varphi^n$$

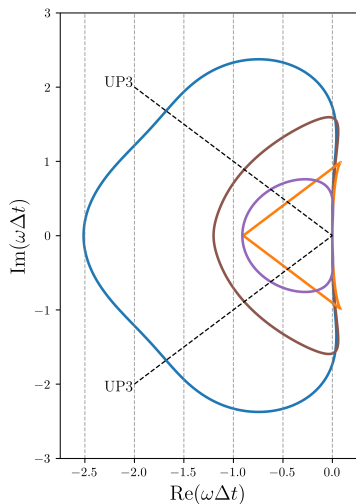
- Facteur d'amplification

$$\varphi^{n+1} = \mathcal{A}_{\text{num}} \varphi^n, \quad \text{avec } \mathcal{A}_{\text{num}} = 1 - \nu k^2 \Delta t$$

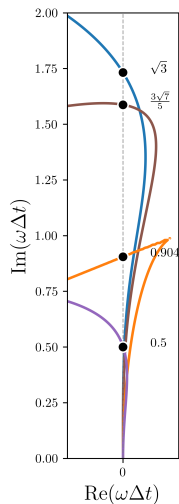
→ Schéma stable ($|\mathcal{A}_{\text{num}}| \leq 1$) si $\nu k^2 \Delta t \leq 2$

Diagramme de stabilité

Eigenvalue stability boundaries



Zoom near $\text{Re}(\omega\Delta t) = 0$



$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\varphi, \quad \omega \in \mathbb{C}$$

Objectif de l'augmentation de l'ordre d'un schema :

- Diminuer les erreurs d'amortissement et de dispersion
 - ▷ Au moins lorsque la solution est "régulière"
 - ▷ Lorsque le processus est suffisamment bien résolu (i.e. θ petit ($\lambda \gg \Delta x$))

Remarques

1. Impact de l'augmentation de l'ordre sur la condition de stabilité : plus l'ordre est élevé, plus la condition de stabilité est contraignante.
2. Augmenter l'ordre du schéma ou augmenter la résolution de la grille (diminuer Δx) ?
3. Que faire près des bords (côtes) ? (Dégradation du schéma)
4. Parallélisation ? (le nombre de ghost cells nécessaires augmente avec l'ordre du schema)

Nombre de Courant maximum (contrainte CFL)

	$\alpha_{C2}^{\max}$	$\alpha_{UP3}^{\max}$	$\alpha_{C4}^{\max}$	$\alpha_{UP5}^{\max}$	$\alpha_{C6}^{\max}$
LFRA ($\varepsilon = 0.1$)	0.905	Unst.	0.659	Unst.	0.570
LFAM3	1.587	0.861	1.159	0.889	1
RK2	Unst.	0.87358	Unst.	Unst.	Unst.
RK3	1.732	1.626	1.262	1.435	1.091

$$\alpha_{C4}^{\max} = 0.73\alpha_{C2}^{\max}, \quad \alpha_{C6}^{\max} = 0.63\alpha_{C2}^{\max}$$

Nombre de Courant maximum (contrainte CFL) divisé par le nombre d'évaluations du membre de droite

	$\alpha_{C2}^{\max}$	$\alpha_{UP3}^{\max}$	$\alpha_{C4}^{\max}$	$\alpha_{UP5}^{\max}$	$\alpha_{C6}^{\max}$
LFRA ($\varepsilon = 0.1$)	0.905	Unst.	0.659	Unst.	0.570
LFAM3	0.794	0.43	0.58	0.44	0.5
RK2	Unst.	0.437	Unst.	Unst.	Unst.
RK3	0.58	0.542	0.42	0.478	0.36

Extension au 2D (ou plus)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad c_x > 0, c_y > 0$$

Si la stabilité du schéma 1D est donnée par $\frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \leq \alpha_{\text{adv}}^*$

alors la stabilité du schéma 2D est donnée par $\frac{c_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \leq \alpha_{\text{adv}}^*$

... sauf si on fait du splitting directionnel (i.e. on intègre d'abord en x puis en y)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{(x)} - \varphi^n}{\Delta t} &= -c_x \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{(x)}}{\Delta t} &= -c_y \frac{\partial \varphi^{(x)}}{\partial y} \end{aligned}$$

dans ce cas on a:

$$\max \left(\frac{c_x \Delta t}{\Delta x}, \frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \right) \leq \alpha_{\text{adv}}^*$$