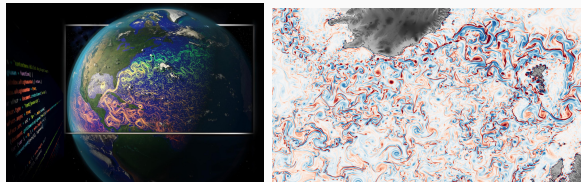


Coeurs dynamiques



Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmosphère

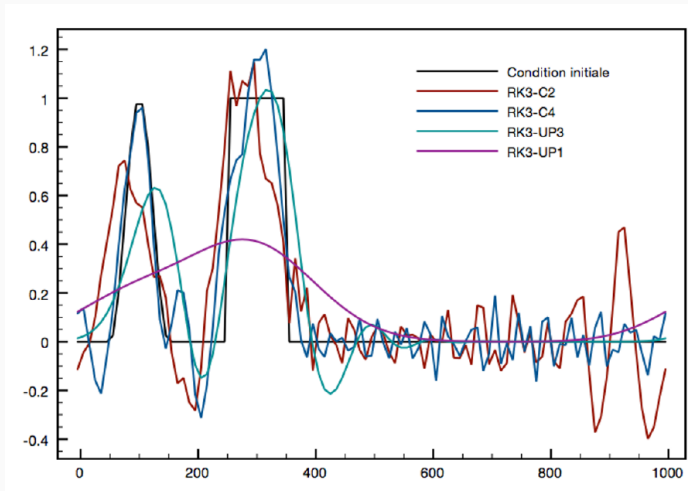
November 25, 2025

Grenoble, IGE

Propriétés de monotonie

Propriétés de monotonie

Equation d'advection, schéma temporel: RK3



Pourquoi la monotonie ?

L'équation de transport ne crée ni ne détruit d'extréma: ils sont simplement transportés le long des caractéristiques

- En pratique, on veut que le schéma numérique n'*amplifie* pas les extrema (pas de nouveaux maxima/minima parasites).
- Cela évite oscillations non physiques près des discontinuités.
- La monotonie est une propriété discrète qui garantit une forme de principe du maximum et une stabilité en norme $\mathcal{L}^\infty$.

$$\|\varphi(., t)\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|\varphi(., 0)\|_{\mathcal{L}^\infty}, \quad \forall t, \quad \|\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty} = \max_x |\varphi(x)|$$

- **Variation totale au niveau discret :**

$$\text{TV}(\varphi) = \sum_j |\varphi_{j+1} - \varphi_j|$$

- ▷ si la série oscille beaucoup, la TV est grande;
- ▷ si la série est lisse ou monotone, la TV est petite;
- ▷ si elle crée des oscillations parasites, la TV augmente.

Un schéma est dit **TVD (Total Variation Diminishing)** s'il satisfait :

$$\text{TV}(\varphi^{n+1}) \leq \text{TV}(\varphi^n), \quad \forall n$$

Un schéma est dit **TVB (Total Variation Bounded)** s'il satisfait

$$\text{TV}(\varphi^n) \leq C, \quad \forall n$$

avec C une constante dépendant des données initiales

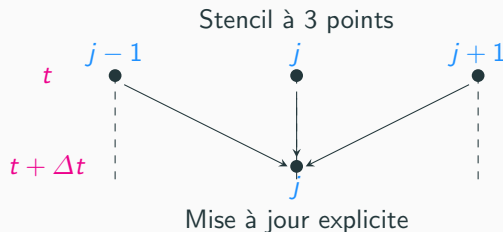
- Equation de Burgers non visqueuse: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0$.
- Limite de l'équation de Burgers visqueuse $\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_\varepsilon^2}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x^2}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

→ Si les gradients sont forts, le terme visqueux ne peut pas être négligé (même si ε est petit).

Utilisation de schémas numériques qui incluent une dissipation numérique “forte” proche des forts gradients

Propriétés de monotonie: conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$



Upwind range conditions (pour $c\Delta t \leq \Delta x$, i.e. $\alpha_{\text{adv}} \leq 1$)

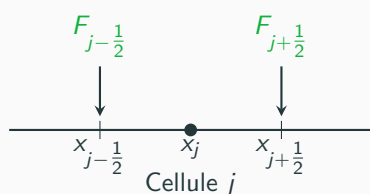
$$\min(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n) \leq \varphi_j^{n+1} \leq \max(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n) \quad \text{si } c > 0$$

$$\min(\varphi_j^n, \varphi_{j+1}^n) \leq \varphi_j^{n+1} \leq \max(\varphi_j^n, \varphi_{j+1}^n) \quad \text{si } c < 0$$

$\Rightarrow$ implique la positivité (maximum discret)

Approche TVD (Total Variation Diminishing)

Propriétés de monotonie: suppression de la création des extremas



$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

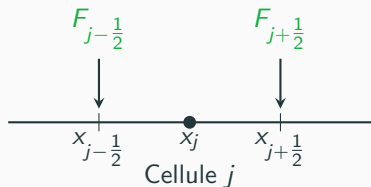
Euler amont: $F_{j+1/2} = c\varphi_j^n$ (pour $c > 0$)

$$\longrightarrow \varphi_j^{n+1} = \alpha_{\text{adv}} \varphi_{j-1}^n + (1 - \alpha_{\text{adv}}) \varphi_j^n$$

Si $\alpha_{\text{adv}} \leq 1$, alors $\min(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n) \leq \varphi_j^{n+1} \leq \max(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n)$ 👍

Un schéma monotone linéaire (i.e. les "poids" du schéma ne dépendent pas de la solution numérique) est au plus d'ordre 1 (théorème de Godunov/Harten)

Propriétés de monotonie: suppression de la création des extremas



$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

Lax-Wendroff: $F_{j+1/2} = c\varphi_j^n + \frac{c(1-\alpha_{\text{adv}})}{2}(\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n)$

$$\varphi_j^{n+1} = \underbrace{\frac{\alpha_{\text{adv}}}{2}(1 + \alpha_{\text{adv}})}_a \varphi_{j-1}^n + \underbrace{(1 - \alpha_{\text{adv}})}_d \varphi_j^n - \underbrace{\frac{\alpha_{\text{adv}}}{2}(1 - \alpha_{\text{adv}})}_b \varphi_{j+1}^n$$

Si $\alpha_{\text{adv}} < 1$, alors $b < 0$ 🗑️

(sauf pour $\alpha_{\text{adv}} = 1 \rightarrow$ schéma “exact”)

Propriétés de monotonie: limiteurs de flux

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

Lax Wendroff modifié

$$F_{j+1/2} = c\varphi_j^n + \phi_j^n \frac{c(1 - \alpha_{\text{adv}})}{2} (\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n), \quad \phi_j^n \equiv \text{limiteur de flux}$$

Après calculs. . ., on peut écrire

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - C_{j-1/2}^- (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n)$$

$$\text{avec } C_{j-1/2}^- = \alpha_{\text{adv}} + \frac{\alpha_{\text{adv}}(1 - \alpha_{\text{adv}})}{2} \left[\frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right] \text{ avec } r_j^+ = \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}$$

r_j^+ correspond au ratio entre pente amont ($c > 0$) et pente centrée.

Propriétés de monotonie

$$r_j^+ = \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}$$



$$0 < r_j \ll 1$$

risque de créer un minimum local



$$r_j \gg 1$$

risque de créer un maximum local



$$r_j < 0$$

en présence d'un maximum local

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - C_{j-1/2}^- (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n)$$

si $0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1$, alors

$$\min(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n) \leq \varphi_j^{n+1} \leq \max(\varphi_j^n, \varphi_{j-1}^n)$$

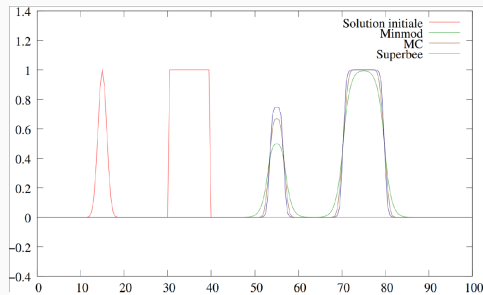
monotonie 👍

Propriétés de monotonie

$$C_{j-1/2}^- = \alpha_{\text{adv}} + \frac{\alpha_{\text{adv}}(1 - \alpha_{\text{adv}})}{2} \left[\frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right]$$

Plusieurs choix possibles de limiteurs: $\Phi(r)$ tels que $0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1$:

- **minmod**: $\Phi(r) = \minmod(1, r)$
- **superbee**: $\Phi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r))$
- **MC**: $\Phi(r) = \max(0, \min((1 + \theta)/2), 2, 2r)$
- **Van Leer**: $\Phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$



Propriétés de monotonie : autres approches

- TVD (Total Variation Diminishing)
- FCT (Flux Corrected Transport)
- ENO (Essentially Non Oscillatory)
- WENO (Weighted ENO)
 - ▷ sélectionnent adaptativement un stencil qui évite les zones où la dérivée change violemment
 - ▷ atténuent fortement les oscillations, mais ne les interdisent pas complètement, monotonie 🚫
- MP (Monotonicity Preserving)
 - ▷ $MP \approx TVD$ localement, mais plus permissif : il peut être non monotone mais avec des oscillations contrôlées.

Schémas temporels préservant la monotonie : schémas

SSP = *Strong Stability Preserving*

Augmentation de l'ordre en temps

RK2 SSP

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^n) \\ \varphi^{(2)} &= \varphi^{(1)} + \Delta t F(\varphi^{(1)}) \\ \varphi^{n+1} &= (\varphi^n + \varphi^{(2)}) / 2 \end{cases}$$

RK3 SSP

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} &= \varphi^n + \Delta t F(\varphi^n) \\ \varphi^{(2)} &= \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}(\varphi^{(1)} + \Delta t F(\varphi^{(1)})) \\ \varphi^{(3)} &= \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{2}{3}(\varphi^{(2)} + \Delta t F(\varphi^{(2)})) \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^{(3)} \end{cases}$$



SSP ne coïncide pas avec la stabilité linéaire
→ pas de temps maximal SSP $\neq$ contrainte CFL

Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps

Schémas couplés espace temps : dérivation

Considérons l'EDP: $\partial_t \varphi + \mathcal{L}\varphi = 0$, $\mathcal{L} = c\partial_x$

1. Développements de Taylor de la dérivée temporelle

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = (\partial_t \varphi)^n + \frac{\Delta t}{2} (\partial_t^2 \varphi)^n + \frac{\Delta t^2}{6} (\partial_t^3 \varphi)^n + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

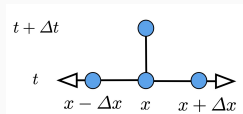
2. Transformation des dérivées temporelles en dérivées spatiales en utilisant l'EDP

$$\partial_t \varphi = -\mathcal{L}\varphi, \quad \partial_t^2 \varphi = \mathcal{L}^2 \varphi, \quad \partial_t^3 \varphi = -\mathcal{L}^3 \varphi$$

3. Substitution de ces expressions dans le développement de Taylor

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \mathcal{L}\varphi^n = \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}^2 \left[\varphi^n - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}\varphi^n \right] + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

4. Extension du *stencil* en espace au temps n pour discrétiser les termes en rouge



→ à l'ordre 2, on obtient le schéma Lax-Wendroff

Avantages

- Schémas stables pour $\alpha_{\text{adv}} \leq 1$ (quel que soit l'ordre)
- Schémas exacts pour $\alpha_{\text{adv}} = 1$
- 1 seule évaluation du second membre par pas de temps

Schémas couplés espace temps

$$\partial_t \varphi + c \partial_x \varphi = 0$$

$$\varphi(x_j, t + \Delta t) = \varphi(x_j - c\Delta t, t)$$

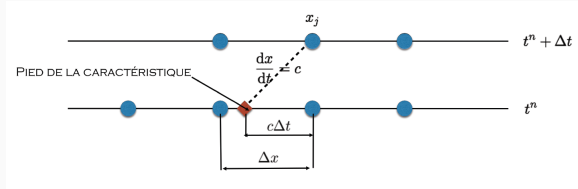


Schéma obtenu en fonction de l'interpolation au pied de la caractéristique:

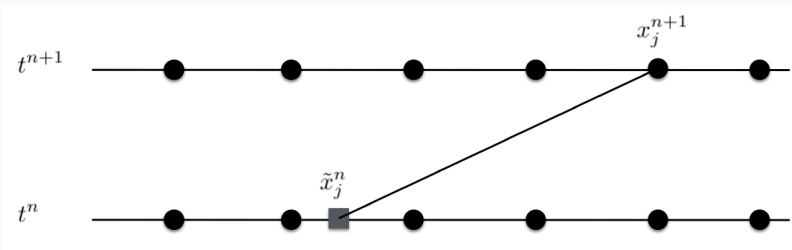
- Linéaire $\longrightarrow$ Euler amont
- Quadratique $\longrightarrow$ Lax-Wendroff
- Quadratic décentré amont $\longrightarrow$ Beam et Warming

Schémas semi-lagrangien: principe

Objectif: construire un schéma d'advection inconditionnellement stable

$$\partial_t \varphi + u(x, t) \partial_x \varphi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{dx}{dt} \partial_x, \quad \text{où } \frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

On écrit $\varphi(x_j^{n+1}, t^{n+1}) = \varphi(\tilde{x}_j^n, t^n)$ où $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t) \\ x(t^{n+1}) = x_j^{n+1} \end{cases}$ et $\tilde{x}_j^n = x(t^n)$



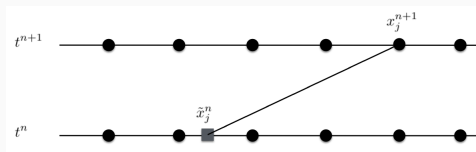
Schémas semi-lagrangien: principe

A vitesse constante: trivial $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t) = c \\ x(t^{n+1}) = x_j^{n+1} \end{cases} \longrightarrow \tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - c\Delta t$

Sinon, calcul de la trajectoire:

1. **Ordre 1:** $\tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t$

2. **Ordre 2 (extrapolation):** $\begin{cases} x^* = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t/2 \\ \tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x^*, t^{n+1/2})\Delta t \end{cases}$ avec $u(t^{n+1/2}) = \frac{3}{2}u(t^n) - \frac{1}{2}u(t^{n-1})$



A coupler avec interpolations monotones au pied de la caractéristique Condition de stabilité :
condition Lipschitz : $|\partial_x u|\Delta t \leq 1$ (i.e. les caractéristiques ne se croisent pas ...)

Schémas semi-lagrangien: principe en multi-D

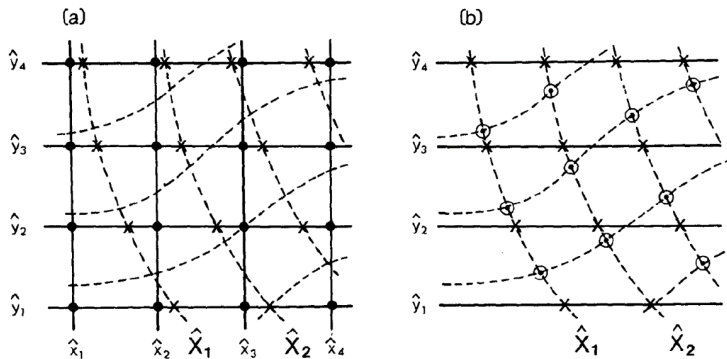


FIG. 2. Schematic illustration of a two-dimensional version of the cascade method of interpolating a generic variable ψ from model grid (solid lines) to Lagrangian grid (broken lines). (a) Having determined $x(\hat{X}, \hat{y})$ by preliminary interpolation from $x(\hat{X}, \hat{Y})$, ψ may be interpolated from nodes of the model grid, marked "•", to values $\psi(\hat{X}, \hat{y})$ on the hybrid grid, marked "x". (b) This is followed by interpolation from $\psi(\hat{X}, \hat{y})$ to values $\psi(\hat{X}, \hat{Y})$ at the final target positions marked "⊙". All interpolations in the process are one-dimensional, requiring $O(N)$ computations each.

(Purser & Leslie, 1991)

Les schémas précédents ne sont pas conservatifs !

Mais versions conservatives possibles (complexes à implémenter en $\text{dim.} > 1$).

1. CISL: Cell Integrated Semi Lagrangian. On transporte (en Lagrangien) les volumes.
2. (*Lin & Rood, 2006*). Formulation volumes finis puis on transporte (en Lagrangien) les flux aux interfaces.

Schémas temporels: cas des systèmes

$$\begin{cases} \partial_t \eta + u_0 \partial_x \eta + H \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + u_0 \partial_x \eta + g \partial_x \eta = 0 \end{cases}$$

Discrétisation vitesses/pression

- Shallow water
- Internal Gravity Waves

Etude du schéma temporel sur un exemple (Euler Forward-Backward (EFB))

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + u_0 \partial_x \eta^n + H \partial_x u^n = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u_0 \partial_x u^n + g \partial_x \eta^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \eta^{n+1} \\ u^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta^n \\ u^n \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \imath k g \Delta t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \imath u_0 k \Delta t & -\imath H k \Delta t \\ 0 & 1 - \imath k u_0 \Delta t \end{pmatrix}$$

Etude du schéma temporel sur un exemple (Euler Forward-Backward (EFB))

$$\begin{pmatrix} \eta^{n+1} \\ u^{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \eta^n \\ u^n \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \imath kg \Delta t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \imath u_0 k \Delta t & -\imath H k \Delta t \\ 0 & 1 - \imath k u_0 \Delta t \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ matrice d'amplification (de gain). Le schéma est stable $\varrho(\mathbf{A}) \leq 1$

Si $u_0 = 0$, le schéma Euler Forward Backward est stable sous la condition (CFL) $\omega \Delta t \leq 2$, où $\omega = k\sqrt{gH}$. Lorsque le schéma est stable, le schéma est **neutre** (pas de dissipation)

Schéma Euler Forward-Backward

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + u_0 \partial_x \eta^n + H \partial_x u^n = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u_0 \partial_x u^n + g \partial_x \eta^{n+1} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{instable si } u_0 > 0$$

Schéma Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^*}{\Delta t} + H \partial_x u^n = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} + g \partial_x \eta^{n+1} = 0 \end{cases} \text{ avec } \eta^* = \eta^n(x - u_0 \Delta t), u^* = u^n(x - u_0 \Delta t)$$

$\longrightarrow$ Condition de stabilité: $k\sqrt{gH}\Delta t \leq 2$

Schéma Semi-Implicit Semi-Lagrangien (SISL)

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^*}{\Delta t} + H \partial_x u^{n+1} = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} + g \partial_x \eta^{n+1} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Helmholtz: } \eta^{n+1} - gH\Delta t^2 \partial_x^2 \eta^{n+1} = \eta^* - H\Delta t \partial_x u^*$$

Inconditionnellement stable

Eulérien vs semi-Lagrangien

- Efficacité vs précision/conservation
- Gain en robustesse
- Parallélisation (?)

Diffusion

Equation parabolique et schéma implicite

$$\partial_t \varphi = \kappa \partial_z^2 \varphi \quad \longrightarrow \quad \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = \kappa \left[(1 - \vartheta) \partial_z^2 \varphi^n + \vartheta \partial_z^2 \varphi^{n+1} \right]$$

- En explicite ($\vartheta = 0$), le schéma est stable si $\nu \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq 1/2$
- $\vartheta = 1/2$: Crank Nicolson
- $\vartheta = 1$: Euler backward

Equation parabolique et schéma implicite

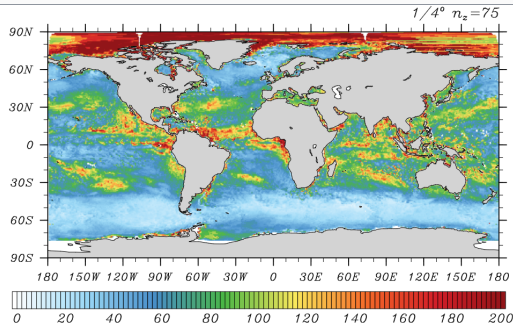


Fig. 10. Ratio between the turbulent vertical diffusivity κ and the effective diffusivity κ^{eff} for each water column of the $1/2^\circ$ (top) and the $1/4^\circ$ (bottom) configurations. κ^{eff} is the diffusivity in the continuous equation which would give the same damping as the numerical damping (ideally we should get $\kappa/\kappa^{\text{eff}} = 1$). Areas shaded in yellow and red indicate regions with large numerical errors in the computation of vertical diffusion. The value of $\kappa/\kappa^{\text{eff}}$ is computed using (3.1) with $\sigma^{(2)} = \bar{\sigma}^{(\text{mld})}$ the averaged value of the vertical parabolic Courant number in the mixed layer and $\theta = 2\pi/N_{\text{mld}}$ with N_{mld} the number of grid points in the mixed layer.

$$\frac{\kappa}{\kappa_{\text{eff}}}$$

Systemes raides

m s^{-1}	Atmosphere	Ocean
c_s (acoustic)	340	1500
c_0 (ext. gravity)	300	200
c_1 (int. gravity)	100	3
U (velocity)	30	0.1

+ une bonne représentation des ondes externes de gravité dans l'océan est essentielle

—> méthodes de splitting

m s ⁻¹	Ocean
c_s (acoustic)	1500
c_0 (ext. gravity)	200
c_1 (int. gravity)	3
U (velocity)	0.1

- La contrainte CFL sur le mode barotrope (rapide) limite le pas de temps

$$\Delta t_{\text{ext}} < \Delta x / C_{\text{ext}}, \text{ where } C_{\text{ext}} = \sqrt{gH} + U_{\text{max}}$$

$$H = 4000 \text{ m}, C_{\text{ext}} = 200 \text{ m s}^{-1}, \Delta x = 1 \text{ km}, \Delta t_{\text{ext}} < 5 \text{ s}$$

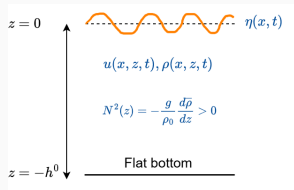
- Mode barocline (lent) la stabilité est imposée par la propagation des ondes internes et l'advection

$$C_{\text{in}} \approx 2 \text{ m s}^{-1} + U_{\text{max}}, \Delta x = 1 \text{ km}, \Delta t_{\text{in}} < 8 \text{ min}$$

- $\Delta t_{\text{in}} / \Delta t_{\text{ext}} \approx 60 - 100$

Formulation du splitting barocline/barotrope (décomposition en modes verticaux)

- x-z inviscid, adiabatic HPEs linearized about rest, without rotation



$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x p / \rho_0 &= 0 \\ \partial_z p &= -\rho g \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0 \\ \partial_t \rho + w \frac{d\bar{\rho}}{dz} &= 0 \end{cases}$$

with surface bc
$$\begin{cases} w(z=0) &= \partial_t \eta \\ p(z=0) &= \rho_0 g \eta \end{cases}$$

and the bottom bc $w(z=-h^0) = 0$

Formulation du splitting barocline/barotrope (décomposition en modes verticaux)

- x-z inviscid, adiabatic HPEs linearized about rest, without rotation
- Normal mode decomposition, N^2 -related Sturm-Liouville problem: $M_q(z)$, $\lambda_q (= c_q^{-2})$

▷ Equivalent formulation of HPEs: $u_q = \langle u, M_q \rangle$, $h_q = \frac{1}{\rho_0 g} \langle p, M_q \rangle$

→ linear uncoupled shallow-water-like systems

▷ For constant stratification ($N^2 = \text{cst}$) :

$$\epsilon = N^2 h^0 / g \quad \begin{cases} c_0 &= \alpha_0 \sqrt{g h^0}, & \text{with } \alpha_0 = 1 + \frac{\epsilon}{6} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ M_0(z) &= 1 - \epsilon \left[\frac{1}{3} + \frac{z}{h^0} + \frac{z^2}{2(h^0)^2} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{cases}$$

→ the barotropic mode is “slightly” depth-dependent

Formulation du splitting barocline/barotrope (décomposition en modes verticaux)

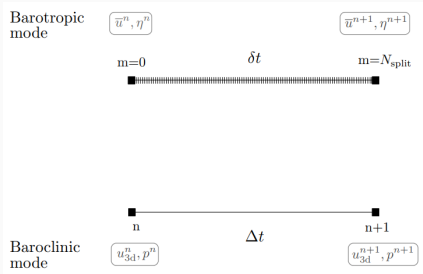
- x-z inviscid, adiabatic HPEs linearized about rest, without rotation
- Normal mode decomposition, N^2 -related Sturm-Liouville problem
 - ▷ For constant stratification ($N^2 = \text{cst}$) :

$$\epsilon = N^2 h^0 / g \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \alpha_0 \sqrt{gh^0}, \quad \text{with } \alpha_0 = 1 + \frac{\epsilon}{6} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ M_0(z) = 1 - \epsilon \left[\frac{1}{3} + \frac{z}{h^0} + \frac{z^2}{2(h^0)^2} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{array} \right.$$

Practical implementation: approximate the barotropic mode as depth-independent

$$M_0^*(z) = 1, \quad u_0^*(x, t) = \langle u \rangle_z(x, t) = \frac{1}{h^0} \int_{-h^0}^0 u \, dz, \quad h_0^*(x, t) = \eta(x, t) + \frac{1}{\rho g h^0} \int_{-h^0}^0 p_h \, dz$$

Formulation du splitting barocline/barotrope (décomposition en modes verticaux)



Split-explicit approach

- Δt : baroclinic (3D) time-step
- Δt_{2D} : barotropic (2D) time-step

$$\Delta t = N_{\text{split}} \Delta t_{2D}.$$

Approximated barotropic mode :

$$\begin{cases} \partial_t \eta &= -\partial_x (h^0 \langle u \rangle_z) \\ \partial_t \langle u \rangle_z &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_x \left(\rho_0 g \eta - \frac{1}{h^0} \int_{-h^0}^0 p_h \, dz \right) \end{cases}$$

Practical implementation

Depth-independent barotropic mode assumption

Consequences :

- Some (fast) barotropic contributions are treated as “slow” terms
- The consistency between the barotropic and baroclinic modes must be enforced

m s^{-1}	Atmosphere
c_s (acoustic)	340
c_0 (ext. gravity)	300
c_1 (int. gravity)	100
U (velocity)	30

Ondes acoustiques et filtrage temporel

- Contrainte de stabilité CFL associée aux ondes acoustiques limite le pas de temps:
 $c_s = 350 \text{ m s}^{-1}$
- External - Internal gravity waves: $c_g = 100 - 300 \text{ m s}^{-1}$
- Advection : $|U| \leq c_s/12$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P & = & 0 \\ \epsilon_{\text{nh}} \frac{Dw}{Dt} + \partial_z P & = & b \\ \epsilon_{\text{nb}} \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u & = & 0 \\ \frac{Db}{Dt} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P & = & 0 \\ \epsilon_{nh} \frac{Dw}{Dt} + \partial_z P & = & b \\ \epsilon_{nb} \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u & = & 0 \\ \frac{Db}{Dt} & = & 0 \end{array} \right.$$

nb: non-Boussinesq; nh: non hydrostatique

- $\epsilon_{nh} = 1$; $\epsilon_{nb} = 1$: pas de filtrage
- $\epsilon_{nh} = 1$; $\epsilon_{nb} = 0$: filtrage ondes acoustiques (requiert un solveur 3D pour la pression)

- $\varepsilon_{nh} = 1$; $\varepsilon_{nb} = 1$: pas de filtrage

Système non-hydrostatique, compressible

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P & = & 0 \\ \frac{Dw}{Dt} + \partial_z P & = & b \\ \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u & = & 0 \\ \frac{Db}{Dt} & = & 0 \end{array} \right.$$

Traitement numérique : semi-implicite

$$\begin{cases} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P^{n+1} &= 0 \\ \frac{Dw}{Dt} + \partial_z P^{n+1} &= b \\ \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u^{n+1} &= 0 \\ \frac{Db}{Dt} &= 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \text{Pb de Helmholtz: } \Delta P^{n+1} - \frac{1}{(c_s \Delta t)^2} P^{n+1} = G$$

Traitement numérique : time-splitting $m = 1, \dots, N_s$, $\delta t = \Delta t / N_s$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u^{m+1} - u^m}{\delta t} + \partial_x P^m & = -U \partial_x u^n - w^n \partial_z U \\ \frac{w^{m+1} - w^m}{\delta t} + \partial_z ((P^m + P^{m+1})/2 - b^m) & = b - U \partial_x w^n \\ \frac{P^{m+1} - P^m}{\delta t} + c_s^2 \partial_x u^{m+1} + c_s^2 \partial_z \left(\frac{w^{m+1} + w^m}{2} \right) & = -U \partial_z P^n \\ \frac{b^{m+1} - b^m}{\delta t} + N^2 w^{m+1} & = -U \partial_x b^n \end{array} \right.$$

Références

- Durran : Numerical Methods for Fluid Dynamics With Applications to Geophysics, Second Edition, 2010, Springer
- Cushman-Roisin et Beckers, 2011: Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects, 2nd Edition, Academic Press
- Lauritzen P.H., Jablonowski C., Taylor M.A. and R.D. Nair, 2014: Numerical Techniques for Global Atmospheric Models. Springer. Lecture notes in computational science and engineering.
- Daru V. et C. Tenaud, 2005: Approximations d'ordre élevé pour les écoulements compressibles avec discontinuités. Ecole de printemps de Mécanique des Fluides Numérique, Roscoff, 2005.
- Laney, C.B. 1998: Computational Gasdynamics
- Kuzmin D., R. Löhner and S. Turek (Eds): Flux-Corrected Transport, Principles, Algorithms and Applications, Springer, 2005